

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 – HÀ NỘI

Bài I (2,5 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$. Tính giá trị của A khi $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} + \frac{4}{\sqrt{x-4}} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x+2}}$ (với $x \geq 0; x \neq 16$)

3) Với các của biểu thức A và B nói trên, hãy tìm các giá trị của x nguyên để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là số nguyên

Hướng dẫn giải:

1) Với $x = 36$, ta có: $A = \frac{\sqrt{36+4}}{\sqrt{36+2}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

2) Với $x \geq 0; x \neq 16$ ta có :

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \frac{\sqrt{x+2}}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}$$

3) Ta có: $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+2}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \frac{2}{\sqrt{x+2}} = \frac{2}{x-16}$.

Để $B(A-1)$ nguyên, x nguyên thì $x-16$ là ước của 2, mà $U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$

Ta có bảng giá trị tương ứng:

$x-16$	1	-1	2	-2
x	17	15	18	14

Kết hợp ĐK $x \geq 0, x \neq 16$, để $B(A-1)$ nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$

Bài II (2,0 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai người cùng làm chung một công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ thì xong. Nếu mỗi người làm một mình thì thời gian để người thứ nhất hoàn thành công việc ít hơn người thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi người phải làm trong bao nhiêu thời gian để xong công việc?

Hướng dẫn giải:

Gọi thời gian người thứ nhất hoàn thành một mình xong công việc là x (giờ), ĐK $x > \frac{12}{5}$

Thì thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là: $x + 2$ (giờ)

Mỗi giờ người thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai làm được $\frac{1}{x+2}$ công việc

Vì cả hai người cùng làm xong công việc trong $\frac{12}{5}$ giờ nên mỗi giờ cả hai đội làm được $1: \frac{12}{5} = \frac{5}{12}$ công việc

Do đó ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)} = \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 14x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 49 + 120 = 169, \sqrt{\Delta'} = 13$$

$$\Rightarrow x = \frac{7-13}{5} = \frac{-6}{5} \text{ (loại)} \text{ và } x = \frac{7+13}{5} = \frac{20}{5} = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy:

Người thứ nhất làm xong công việc trong 4 giờ.

Người thứ hai làm xong công việc trong $4 + 2 = 6$ giờ.

Bài III (1,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^2 - (4m - 1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (ẩn x). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 7$

Hướng dẫn giải:

$$1) \text{ Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 4 \\ \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{6}{x} = 4 + 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{x} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{2}{2} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$.

2) + Phương trình đã cho có $\Delta = (4m - 1)^2 - 12m^2 + 8m = 4m^2 + 1 > 0 \forall m$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\forall m$

+ Theo ĐL Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$$

Khi đó: $x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7$

$\Leftrightarrow (4m - 1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7 \Leftrightarrow 10m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 2m - 3 = 0$ (Ta thấy tổng các hệ số: $a + b + c = 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-3}{5} \end{cases}$ (thỏa mãn)

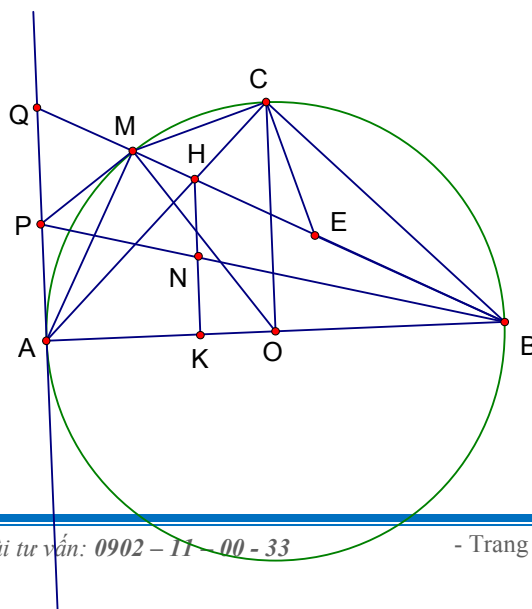
Vậy với $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-3}{5} \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 = 7$

Bài IV (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB . Bán kính CO vuông góc với AB , M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A và C); BM cắt AC tại H . Gọi K là hình chiếu của H trên AB .

- 1) Chứng minh $CBKH$ là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $\widehat{ACM} = \widehat{ACK}$
- 3) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho $BE = AM$. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C
- 4) Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm A . Cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP \cdot MB}{MA} = R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

Hướng dẫn giải:



1) Ta có $\widehat{HCB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

$$\widehat{HKB} = 90^\circ \text{ (do K là hình chiếu của H trên AB)}$$

$\Rightarrow \widehat{HCB} + \widehat{HKB} = 180^\circ$ nên tứ giác CBKH nội tiếp trong đường tròn đường kính HB.

2) Ta có $\widehat{ACM} = \widehat{ABM}$ (do cùng chắn \widehat{AM} của (O))

và $\widehat{ACK} = \widehat{HCK} = \widehat{HBK}$ (vì cùng chắn \widehat{HK} của đtròn đường kính HB)

$$\text{Vậy } \widehat{ACM} = \widehat{ACK}$$

3) Vì $OC \perp AB$ nên C là điểm chính giữa của cung AB $\Rightarrow AC = BC$ và $sđ \widehat{AC} = sđ \widehat{BC} = 90^\circ$

Xét 2 tam giác MAC và EBC có:

$$MA = EB \text{ (gt)}$$

$$AC = CB \text{ (cmt)} \text{ và } \widehat{MAC} = \widehat{MBC} \text{ vì cùng chắn cung } \widehat{MC} \text{ của (O)}$$

$$\Rightarrow \text{MAC và EBC (c.g.c)} \Rightarrow CM = CE \Rightarrow \text{tam giác MCE cân tại C (1)}$$

Ta lại có $\widehat{CMB} = 45^\circ$ (vì chắn cung $\widehat{CB} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{CEM} = \widehat{CMB} = 45^\circ \text{ (tính chất tam giác MCE cân tại C)}$$

$$\text{Mà } \widehat{CME} + \widehat{CEM} + \widehat{MCE} = 180^\circ \text{ (Tính chất tổng ba góc trong tam giác)} \Rightarrow \widehat{MCE} = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1), (2) \Rightarrow tam giác MCE là tam giác vuông cân tại C (đpcm).

$$4) \text{ Từ giả thiết } \frac{AP \cdot MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{R}{MB} = \frac{BO}{BM} \Rightarrow \Delta APM \sim \Delta BOM \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{(Vì } \frac{AP}{AM} = \frac{BO}{BM}, \widehat{PAM} = \widehat{OBM} \text{ (hệ quả))}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM.$$

- Kéo dài PM cắt đường thẳng (d) tại Q. Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMQ} = 90^\circ$ hay tam giác AMQ vuông tại M.

Mà $PM = PA$ nên $\widehat{PAM} = \widehat{PMA} \Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{PQM} \Rightarrow PQ = PM \Rightarrow PA = PQ$ hay P là trung điểm của AQ.

Gọi N là giao điểm của BP với HK. Vì $HK \parallel AQ$ (cùng vuông góc AB) nên theo ĐL Ta-lét, ta có:

$$\frac{NK}{PA} = \frac{BN}{BP} = \frac{HN}{PQ} \text{ mà } PA = PQ \Rightarrow NH = NK \text{ hay BP đi qua trung điểm N của HK.}$$

Bài V (0,5 điểm). Với x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{Ta có } M = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{4y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{3x}{4y}$$

Vì $x, y > 0$, áp dụng bđt Co si cho 2 số dương $\frac{x}{4y}; \frac{y}{x}$ ta có $\frac{x}{4y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$,

dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Vì $x \geq 2y \Rightarrow \frac{x}{y} \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Từ đó ta có $M \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2y$

Vậy GTNN của M là $\frac{5}{2}$, đạt được khi $x = 2y$

Nguồn:  Hocmai.vn